Dossier n°73 : Exemples, d'illustrations, à l'aide de contre-exemples, de l'importance de la vérification des hypothèses lors de l'emploi d'un théorème.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 23 novembre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les premiers contacts des élèves avec les théorèmes se réalisent en classe de sixième , d'abord en géométrie.

Les élèves sont ensuite familiarisés, de la sixième à la Terminale, à l'emploi de tels objets dans tous les domaines mathématiques.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau du collège et du lycée.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

Comme je l'ai expliqué précédemment, les théorèmes sont des objets couramment utilisés par les élèves en mathématiques.

Un théorème permet, à partir d'hypothèses données, de dégager des propriétés, parfois admises, parfois démontrées. En particulier, ces résultats doivent être connus et les théorèmes permettent de ne pas avoir à démontrer les propriétés obtenues dans chacun des cas particulier : ils dégagent une propriété générale sur des cas particuliers.

Le point de départ d'un théorème est donc constitué par les hypothèses, c'est-à-dire les propriétés connues des objets qu'on manipule.

Certains théorèmes comportent plusieurs hypothèses, dont certaines peuvent parfois paraître aux élèves « anecdotiques ».

En particulier, dans l'enseignement tel qu'il est connu aujourd'hui, on demande, après l'introduction d'un nouveau théorème aux élèves, de résoudre plusieurs exercices d'application simple de ce théorème afin qu'ils intègrent et acquièrent des automatismes.

A l'issue de cette phase, il est courant que certaines hypothèses du théorème passent « à la trappe ».

Il faut donc donner aux élèves un contre-exemple où l'hypothèse oubliée s'avère fondamentale pour pouvoir conclure correctement.

L'objectif de ce dossier est donc de présenter des contre-exemples de quelques théorèmes où les hypothèses sont fondamentales pour conclure.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter cinq exercices, illustrant divers théorèmes :

- l'exercice n°1 de niveau quatrième, à propos du théorème de la droite des milieux ;
- l'exercice n°2, de niveau première sur le lien entre le signe de la dérivée et les variations d'une fonction ;
- l'exercice n°3 sur le théorème des valeurs intermédiaires ;
- l'exercice n°4 à propos du raisonnement par récurrence ;
- l'exercice n°5 à propos de la division euclidienne.

Ce sont des exercices courts qui proposent à l'élève de remarquer ou de démontrer certaines des hypothèses nécessaires à l'emploi d'un théorème et l'incite à employer le dit théorème, le plus souvent par une question ouverte. Pour chaque exercice, je rappellerai le théorème en question.

Notons que dans les conditions d'une classe hétérogène, certains élèves ne « tomberont pas dans le piège » et dans ce cas, certaines questions sont obsolètes.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

Théorème de la droite des milieux :

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

Objectif : Illustrer l'importance du fait que les milieux à considérer sont les milieux des côtés d'un triangle.

Méthode : Une figure correspondant aux données de l'énoncé permet de mettre en évidence l'erreur commise.

III.2 Exercice n°2.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de fonction dérivée f'.

- Si f' est strictement positive sur I sauf peut-être en quelques points où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I sauf peut-être en quelques points où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' s'annule sur I alors f est constante sur I.

Objectif : Illustrer l'importance de l'hypothèse : « I est un intervalle ».

Commentaire : En effet, cette hypothèse semble anecdotique » puisque ce qui semble important pour conclure est le signe de f'.

Méthode : Considérer la fonction f : $x \to \frac{1}{x}$ définie sur D = $]-\infty\,;\,0\,[\;\cup\;]\,0\,;+\infty\,[$ dont la dérivée est strictement négative.

III.3 Exercice n°3.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle [a ;b]. Si f(a) et f(b) sont de signes contraires alors l'équation f(x) = admet une solution et une seule dans l'intervalle [a ;b].

Objectif : Illustrer l'importance de l'hypothèse : « f est dérivable sur [a ;b] ».

Commentaire :

Comme dans l'exercice précédent, cette hypothèse ne semble pas intervenir dans les étapes menant à la conclusion.

En fait, c'est la continuité qui est nécessaire pour conclure mais sous cette forme, l'exercice est présentable en première, classe dans laquelle est introduit le théorème.

Méthode : Considérer f : $x \to \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geq 0 \\ x-1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ qui n'est pas « continue » en 0.

III.4 Exercice n°4

Principe du raisonnement par récurrence :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, on procède en trois étapes :

- **Première étape** : on vérifie que P_0 est vraie ;
- **Deuxième étape** : on suppose que pour un entier naturel n quelconque, P_n est vraie et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion** : lorsque les deux premières étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Objectif : Illustrer l'importance de la première étape.

Méthode : P_n : « 10^n+1 est un multiple de 9 » a un caractère héréditaire… et c'est tout !

III.5 Exercice n°5

Théorème :

Soit a une entier relatif. Soit b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple (q,r) d'entiers relatifs vérifiant à la fois a = bq +r et $0 \leq r < b$.

On nomme **division euclidienne de a par b** l'opération qui, au couple (a ,b) associe le couple (q,r) : q est **le quotient** et r **le reste**.

Objectif : Illustrer l'importance de l'hypothèse « $0 \leq r < b$ ».

Méthode : $58 = 17 \times 2 + 24$…

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°45 p 190, Nouveau Transmath 4ème 1998).

Voici un texte rédigé par Marie-José :

« ABC est un triangle, I est le milieu du côté [AC] et A est le milieu de [JB]. J'ai deux milieux donc d'après la propriété des la droite des milieux, je sais que (IJ) // (BC) ».

1. Faire une figure. Que remarque-t-on ?
2. Expliquer l'erreur commise par Marie-José.

IV.2 Exercice n°2 (p 93, Transmath 1ère S 2001)

Soit f la fonction qui à tout $x \in D$ associe $\frac{1}{x}$ où D est la réunion des intervalles disjoints $]-\infty\ ;0[$ et $]\ 0\ ;+\infty\ [$.

1. Montrer que f est dérivable sur D et calculer sa dérivée f'.
2. Etudier le signe de f' sur D.
3. Quelles sont les variations de f sur D ?
4. Calculer f(-1) et f(1) et les comparer. Que remarque-t-on ?

IV.3 Exercice n°3 (2-2 p 94 , Transmath 1ère S 2001).

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geq 0 \\ x-1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

1. Calculer f(-1) et f(1) et donner leur signe.
2. L'équation f(x) = 0 admet-elle des solutions sur [-1 ;1] ?
3. Tracer à l'aide d'une calculatrice la courbe représentative de f sur [-1 ;1]. Que remarque-t-on ?

IV.4 Exercice n°4 (n°11 p 28 , Terracher TS 2002).

Considérons la propriété P_n : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 ».

a) Vérifier l'égalité $10^{n+1} + 1 = 9 \times 10^n + 10^n + 1$
b) En déduire que la propriété P_n a un « caractère héréditaire ».
c) P_n est-elle vraie pour tout entier n ?

IV.5 Exercice n°5 (p11, Transmath TS Spé 2002).

1. Vérifier que $58 = 17 \times 2 + 24$
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 58 par 17 ?

V Commentaires.

Pour ce dossier, je recommande vivement de feuilleter les manuels Transmath du lycée, et plus particulièrement les pages de cours.

En effet, dans celles-ci, on retrouve face à face les points importants du cours et des remarques sur ces points, ainsi que des exercices type.

Dans ces remarques, les auteurs attirent l'attention des élèves sur l'importance de certaines hypothèses.